Auszug aus der Abhandlung „Das umgekehrte Problem der Brennlinien".

Von Dr. G. W. Strauch.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. November 1859.)

EINLEITUNG.

§. 1. Hier wird der Begriff der Brennlinien aufgestellt, und dieselben in katakaustische und diakaustische eingetheilt. Beiderlei Brennlinien sind einhüllende Grenzcurven, und einer graden Linie kann niemals die Eigenschaft einer Brennlinie zukommen. Die Brennlinien machen keine eigene Art von Curven aus, und jede beliebige Curve kann als Katakaustika oder Diakaustika vorgeschrieben, und die zugehörige Reflexions- oder Refractionscurve aufgesucht werden.

§. 2. Allgemeine und kurze Anleitung, zu einer vorgeschriebenen Reflexionscurve die zugehörige Katakaustika aufzusuchen, und zwar für die beiden Fälle, wo die ursprünglichen Lichtstrahlen entweder mit einander parallel sind, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Zur Aufsuchung einer Katakaustika bedarf es keiner Integration.

§. 3. Allgemeine und kurze Anleitung, zu einer vorgeschriebenen Refractionscurve die zugehörige Diakaustika aufzusuchen, und zwar ebenfalls für die beiden Fälle, wo die ursprünglichen Lichtstrahlen entweder mit einander parallel sind, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen. Zur Aufsuchung einer Diakaustika bedarf es ebenfalls keiner Integration.

§. 4. Hier befindet sich eine vorläufige Andeutung, wie zu einer vorgeschriebenen Brennlinie die Reflexions- oder die Refractionscurve aufgesucht wird. Diese beiderlei Curven müssen jedesmal einer Differentialgleichung der zweiten Ordnung genügen, können aber niemals durch das mit zwei Integrationsconstanten versehene allgemeine, sondern nur durch das mit einem einzigen Integrationsconstanten versehene einfach singuläre Integral dargestellt werden. Die Grenzcurven unterscheiden sich in solche von ungerader und in solche von gerader Ordnung. Die Brennlinien sind Grenzcurven der ersten, und die Reflexions- und Refractionscurven sind Grenzcurven der zweiten Ordnung. Das Problem der Brennlinien ist also dem Evolutionsproblem analog; denn auch die Evoluten sind Grenzcurven der ersten, und die Evolventen sind Grenzcurven der zweiten Ordnung. Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Abtheilungen, je nachdem man die Reflexions- oder die Refractionscurven sucht. Jede Abtheilung zerfällt wieder in zwei Abschnitte, je nachdem die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind, oder von einem leuchtenden Punkte herkommen.

Erste Abtheilung.

§§. 5—14. Hier werden die Reflexionscurven gesucht, während die Katakaustika vorgeschrieben ist.

Erster Abschnitt.

§§. 5—9. Es werden die Reflexionscurven gesucht, während die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind.

§. 5. Wenn die Lichtstrahlen parallel auf eine Curve auffallen, und so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in den vorgeschriebenen Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zusammen zieht; dann ist die Reflexionscurve dargestellt durch

$$(y - \mathfrak{h})^2 = 2 \cdot (\mathfrak{g} + E) \cdot \left(x - \frac{\mathfrak{g} - E}{2}\right)$$

d. h. man hat, wegen des Integrationsconstanten E, eine Reihe stetig auf einander folgender Parabeln mit dem gemeinschaftlichen Brennpunkte $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ und mit einer gemeinschaftlichen Hauptaxe, welche durch den Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ geht, und mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel läuft.

§. 6. Wenn die Lichtstrahlen parallel auf eine Curve auffallen, und so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika eine durch die Gleichung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ vorgeschriebene Curve ist; dann ist die Reflexionscurve dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$$

$$\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = K + x - \int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

d. h. wenn man aus diesen drei Gleichungen die beiden Bestandtheile $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminirt, so gelangt man zu einer neuen Gleichung

$$F(x, y, K) = 0,$$

durch welche, wegen des Integrationsconstanten K, eine Reihe stetig auf einander folgender Reflexionscurven dargestellt ist; und von jeder einzelnen dieser Curven wird die vorgeschriebene Katakaustika erzeugt.

§. 7. Wenn die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$ vorgeschriebene semikubische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

$$\frac{-3.\mathfrak{x} + \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}}{3.\mathfrak{x}} \cdot x = K \qquad - \frac{4.h}{27.\mathfrak{y}} \cdot \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}$$

$$\frac{-3.\mathfrak{x} + \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}}{2.\mathfrak{y}} \cdot y = K - \frac{\mathfrak{x}}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27.\mathfrak{y}}\right) \cdot \sqrt{4.\mathfrak{y}^2 + 9.\mathfrak{x}^2}$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

Die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven ist aber auch dargestellt durch die Verbindung der zwei Gleichungen:

$$\frac{p^2}{1-p^2} \cdot x = L - \frac{2h}{27} \cdot \frac{1+p^2}{p}$$

$$p \cdot y = 2L - \frac{4h}{27} \cdot \frac{1+p^2}{p} + \frac{h}{27} \cdot \frac{(1-p^2)^2}{p}$$

Hier ist p das gebräuchliche Abkürzungszeichen statt $\frac{dy}{dx}$, und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst ihrer eigenen Tangenten construiren.

Dass aber durch die erste Verbindung dreier Gleichungen dieselben Curven erzeugt werden, wie durch die zweite Verbindung zweier Gleichungen; dafür ist die ausreichende Probe beigefügt.

§. 8. Wenn die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$ vorgeschriebene konische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$$

$$\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}}.x = K + \frac{h}{2}.\lg\text{nat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

$$\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}.y = K + \frac{\mathfrak{y}.(-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{2h} + \frac{h}{2}.\lg\text{nat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

Die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven ist aber auch dargestellt durch die Verbindung der zwei Gleichungen:

$$\frac{p^2}{1-p^2}.x = L + \frac{h}{4}.\lg\text{nat}\,p$$

$$p.y = 2L + \frac{h}{4}.(1-p^2) + \frac{h}{2}.\lg\text{nat}\,p$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst ihrer eigenen Tangenten construiren.

Dass aber durch die erste Verbindung dreier Gleichungen dieselben Curven erzeugt werden, wie durch die zweite Verbindung zweier Gleichungen; dafür ist die ausreichende Probe beigefügt.

§. 9. Wenn die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$ vorgeschriebene Kreislinie ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$$

$$\frac{k-\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}} \cdot x = K + k \cdot \left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \text{arc tg } \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

$$\frac{k-\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} \cdot y = -K - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} + k \cdot \left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} - \text{arc tg } \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen.

$$\frac{p^2}{1-p^2} \cdot x = L - k \cdot \left(\frac{p}{1-p^2} - \text{arc tg } p\right)$$

$$p \cdot y = 2L - k \cdot (p - 2 \cdot \text{arc tg } p)$$

und auch hier ist die ausreichende Probe beigefügt, dass durch die erste und durch die zweite Verbindung ganz dieselben Curven erzeugt werden.

Zweiter Abschnitt.

§§. 10—14. Hier werden die Reflexionscurven gesucht, während die Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen.

§. 10. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika sich in den vorgeschriebenen Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zusammenzieht; dann ist die Reflexionscurve dargestellt durch

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{g})^2 + (y-\mathfrak{h})^2} = C$$

d. h. man hat, wegen des Integrationsconstanten C, eine Reihe stetig auf einander folgender Ellipsen, denen allen die nämlichen zwei Brennpunkte zukommen. Der leuchtende Punkt ist der eine, und der fest vorgeschriebene Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ ist der andere Brennpunkt.

§. 11. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika eine durch die Gleichung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ vorgeschriebene Curve ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = K - \int\sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

d. h. wenn man aus diesen drei Gleichungen die beiden Bestandtheile $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminirt, so gelangt man zu einer neuen Gleichung

$$F(x, y, K) = 0,$$

durch welche, wegen des Integrationsconstanten K, eine Reihe stetig aufeinander folgender Reflexionscurven dargestellt ist; und von jeder einzelnen dieser Curven wird die vorgeschriebene Katakaustika erzeugt.

§. 12. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und so zurückgeworfen werden, dass die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^3 = h.\mathfrak{x}^2$ vorgeschriebene semikubische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig aufeinander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{2\mathfrak{y}}{3\mathfrak{x}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2+(y-\mathfrak{y})^2} = K - \left(\frac{1}{3}+\frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \cdot \sqrt{9.\mathfrak{x}^2+4.\mathfrak{y}^2}$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

§. 13. Wenn die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$ vorgeschriebene konische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig aufeinander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^2 = 2h \cdot \mathfrak{x}$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{h}{\mathfrak{y}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\mathfrak{x})^2 + (y-\mathfrak{y})^2} = K - \frac{\mathfrak{y}.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} + \frac{h}{2} \cdot \lg\text{nat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

§. 14. Wenn die Katakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$ vorgeschriebene Hypokykloide ist; dann ist die Reihe der stetig aufeinander folgenden Reflexionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

$$(y - \mathfrak{y}) \cdot \sqrt[3]{\mathfrak{x}} + (x - \mathfrak{x}) \cdot \sqrt[3]{\mathfrak{y}} = 0$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} + \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{x})^2} = K - \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{h \cdot \mathfrak{x}^2}$$

und man kann die gesuchten Reflexionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Katakaustika construiren.

Zweite Abtheilung.

§§. 15—24. Hier werden die Refractionscurven gesucht, während die Diakaustika vorgeschrieben ist.

Erster Abschnitt.

§§. 15—19. Es werden die Refractionscurven gesucht, während die ursprünglichen Lichtstrahlen mit einander parallel sind.

§. 15. Wenn die Lichtstrahlen parallel auf eine Curve auffallen, und bei ihrem Durchgange so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in den vorgeschriebenen Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zusammenzieht; dann ist die Refractionscurve dargestellt durch

$$\frac{\left(x - \frac{\lambda^2 \cdot \mathfrak{g} + E}{\lambda^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 1}\right)^2 \cdot (\mathfrak{g} + E)^2} + \frac{(y - \mathfrak{h})^2}{\frac{1}{\lambda^2 - 1} \cdot (\mathfrak{g} + E)^2} = 1.$$

Hier ist E der Integrationsconstante, und man hat eine Reihe stetig aufeinander folgender Ellipsen oder eine Reihe stetig aufeinander folgender Hyperbeln, je nachdem $\lambda^2 > 1$ oder $\lambda^2 < 1$ ist. Die Hauptaxe aller dieser Curven läuft in der Entfernung $y = \mathfrak{h}$ mit der Abscissenaxe parallel, dieselbe ist also auch mit den ursprünglichen Lichtstrahlen parallel.

§. 16. Wenn die Lichtstrahlen parallel auf eine Curve auffallen, und bei ihrem Durchgange so gebrochen werden, dass die Diakaustika eine durch die Gleichung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ vorgeschriebene Curve ist; dann ist die Refractionscurve dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$$

$$\lambda \cdot \sqrt{(y - \mathfrak{y})^2 + (x - \mathfrak{x})^2} = K + x - \lambda \cdot \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2}$$

d. h. wenn man aus diesen drei Gleichungen die beiden Bestandtheile $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminirt, so gelangt man zu einer neuen Gleichung

$$F(x, y, K) = 0,$$

durch welche, wegen des Integrationsconstanten K, eine Reihe stetig auf einander folgender Refractionscurven dargestellt ist; und von jeder einzelnen dieser Curven wird die vorgeschriebene Diakaustika erzeugt.

§. 17. Wenn die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$ vorgeschriebene semikubische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^3 = h \cdot \mathfrak{x}^2$$

$$\frac{-3\mathfrak{x} + \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{3 . \mathfrak{x}} . x = K - \lambda \cdot \frac{4h}{27\mathfrak{y}} \cdot \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$

$$\frac{-3\mathfrak{x} + \lambda . \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}}{2 . \mathfrak{y}} . y = K - \frac{\mathfrak{x}}{2} + \lambda \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right) \cdot \sqrt{4 . \mathfrak{y}^2 + 9 . \mathfrak{x}^2}$$

und man kann die gesuchten Refractionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven ist aber auch dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}.x = L + \frac{8.\lambda^2.h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$

und

$$\left(\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right).y = (\lambda^2-1).L$$

$$+\frac{8.\lambda^2.h}{27.(\lambda^2-1)}.\left(p-\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$

$$+\frac{4h}{27.(\lambda^2-1)^2}.\left(-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)^2.\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}$$

und man kann die gesuchten Refractionscurven mittelst ihrer eigenen Tangenten construiren.

Dass aber durch die erste Verbindung dreier Gleichungen dieselben Curven erzeugt werden, wie durch die zweite Verbindung zweier Gleichungen; dafür ist die ausreichende Probe beigefügt.

§. 18. Wenn die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$ vorgeschriebene konische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$$

$$\frac{-\mathfrak{y}+\lambda.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{\mathfrak{y}}.x = K+\lambda.\frac{h}{2}.\lg\text{nat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

$$\frac{-\mathfrak{y}+\lambda.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}.y = K+\frac{\mathfrak{y}.(-\mathfrak{y}+\lambda.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2})}{2h}$$

$$+\lambda.\frac{h}{2}.\lg\text{nat}\left(\frac{-\mathfrak{y}+\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gesuchten Refractionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

Die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven ist aber auch dargestellt durch die Verbindung der beiden Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\cdot x = L + \frac{\lambda.h}{2(\lambda^2-1)}\cdot \lg \text{nat}\left(\lambda.p + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$

$$\left(\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)\cdot y = (\lambda^2-1).L + \frac{h}{2.(\lambda^2-1)}\cdot\left(-\lambda^2.p + \right.$$
$$\left. + \sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right).\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}$$
$$+ \frac{\lambda.h}{2}\cdot \lg \text{nat}\left(\lambda.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}\right)$$

und man kann die gesuchten Refractionscurven mittelst ihrer eigenen Tangenten construiren.

Dass aber durch die erste Verbindung dreier Gleichungen dieselben Curven erzeugt werden, wie durch die zweite Verbindung zweier Gleichungen; dafür ist die ausreichende Probe beigefügt.

§. 19. Wenn die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$ vorgeschriebene Kreislinie ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = k^2$$
$$\frac{-\mathfrak{y}+\lambda.k}{\mathfrak{y}}\cdot x = K + \lambda\cdot k\cdot\left(\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}} - \text{arc tg}\,\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$
$$\frac{-\mathfrak{y}+\lambda.k}{\mathfrak{x}}\cdot y = -K - \frac{k^2}{\mathfrak{x}} + \lambda\cdot k\cdot\left(\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} - \text{arc tg}\,\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{y}}\right)$$

oder durch die Verbindung der folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\cdot x =$$
$$= L - \lambda.k.\left(\frac{1}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}} + \frac{1}{\lambda^2-1}.\text{arc tg}\,\frac{-(\lambda^2-1)}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\right)$$

und

$$\frac{\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}{\lambda^2-1}\cdot y =$$
$$= L - \frac{\lambda.k}{\lambda^2-1}\cdot\left(p + \text{arc tg}\,\frac{-(\lambda^2-1)}{-\lambda^2.p+\sqrt{\lambda^2.(1+p^2)-1}}\right)$$

und auch hier ist die ausreichende Probe beigefügt, dass durch die erste und durch die zweite Verbindung ganz dieselben Curven erzeugt werden.

Zweiter Abschnitt.

§. 20—24. Hier werden die Refractionscurven gesucht, während die Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkte herkommen.

§. 20. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und bei ihrem Durchgange so gebrochen werden, dass die Diakaustika sich in den vorgeschriebenen Punkt $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ zusammenzieht; dann ist die Refractionscurve dargestellt durch

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2} \pm \lambda \cdot \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = C.$$

Hier ist C der Integrationsconstante, und man hat eine Reihe stetig auf einander folgender Refractionscurven des vierten Grades, welcher sich jedoch auf den zweiten erniedrigt, wenn $C=0$ ist.

§. 21. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und bei ihrem Durchgange so gebrochen werden, dass die Diakaustika eine durch die Gleichung $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ vorgeschriebene Curve ist; dann ist die Refractionscurve dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$$

$$(y-\mathfrak{y}) = (x-\mathfrak{x}) \cdot \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2+y^2} \pm \lambda . \sqrt{(y-\mathfrak{y})^2+(x-\mathfrak{x})^2} = K \mp \lambda . \int \sqrt{d\mathfrak{x}^2+d\mathfrak{y}^2}$$

d. h. wenn man aus diesen drei Gleichungen die beiden Bestandtheile $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eliminirt, so gelangt man zu einer neuen Gleichung

$$F(x, y, K) = 0,$$

durch welche, wegen des Integrationsconstanten K, eine Reihe stetig auf einander folgender Refractionscurven dargestellt ist; und von jeder einzelnen dieser Curven wird die vorgeschriebene Diakaustika erzeugt.

§. 22. Wenn die von einem leuchtenden Punkte herkommenden Lichtstrahlen auf eine Curve auffallen, und bei ihrem Durchgange so gebrochen werden, dass die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^3 = h . \mathfrak{x}^2$ vorgeschriebene semikubische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^3 = h \,.\, \mathfrak{x}^2$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \,.\, \frac{2\mathfrak{y}}{3\mathfrak{x}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \lambda.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} =$$

$$= K \mp \lambda \left(\frac{1}{3} + \frac{4h}{27\mathfrak{y}}\right).\sqrt{9.\mathfrak{x}^2 + 4.\mathfrak{y}^2}$$

und man kann die gesuchten Refractionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

§. 23. Wenn die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{y}^2 = 2h.\mathfrak{x}$ vorgeschriebene konische Parabel ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{y}^2 = 2h \,.\, \mathfrak{x}$$

$$(y - \mathfrak{y}) = (x - \mathfrak{x}) \,.\, \frac{h}{\mathfrak{y}}$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \lambda.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} =$$

$$= K \mp \lambda.\left(\frac{\mathfrak{y}.\sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{2h} - \frac{h}{2}.\lg \text{nat} \frac{-\mathfrak{y} + \sqrt{h^2+\mathfrak{y}^2}}{h}\right)$$

und man kann die gefundenen Refractionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

§. 24. Wenn die Diakaustika die durch die Gleichung $\mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$ vorgeschriebene Hypokykloide ist; dann ist die Reihe der stetig auf einander folgenden Refractionscurven dargestellt durch die Verbindung der drei Gleichungen:

$$\mathfrak{x}^{\frac{2}{3}} + \mathfrak{y}^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}$$

$$(y - \mathfrak{y}) \,.\, \sqrt[3]{\mathfrak{x}} + (x - \mathfrak{x}) \,.\, \sqrt[3]{\mathfrak{y}} = 0$$

$$\sqrt{(x-g)^2 + y^2} \pm \lambda.\sqrt{(y-\mathfrak{y})^2 + (x-\mathfrak{x})^2} = K \mp \frac{3\lambda}{2}.\sqrt[3]{k.\mathfrak{x}^2}$$

und man kann die gefundenen Refractionscurven mittelst der Coordinaten der vorgeschriebenen Diakaustika construiren.

ANHANG.

§§. 25—27. Hier wird auf analytischem Wege nachgewiesen, dass, wenn eine gerade Linie als Brennlinie vorgeschrieben wird, weder eine Reflexions- noch eine Refractionscurve existirt.